Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1940. Heft I

Sitzungen Januar-Juni

München 1940

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ferdinand von Lindemann

Von Constantin Carathéodory

Carl Louis Ferdinand Lindemann wurde in Hannover am 12. April 1852 geboren und starb in München am 6. März 1939. Er studierte in Göttingen, Erlangen, München, Paris und London, erwarb bei Felix Klein die Doktorwürde 1873 in Erlangen, habilitierte sich 1877 in Würzburg, wurde im selben Jahre außerordentlicher, 1879 ordentlicher Professor in Freiburg, kam 1883 nach Königsberg und 1893 nach München, wo er bis zu seinem Lebensende verblieb. In unsere Akademie wurde er 1894 zum außerordentlichen, 1895 zum ordentlichen Mitglied gewählt.

Die Entdeckung, welche, solange es noch eine mathematische Wissenschaft geben wird, mit Lindemanns Namen verknüpft sein wird, ist der Beweis der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises. Dieses Problem, das schon im Altertum gestellt wurde, war so berühmt, daß sogar im Mittelalter, zu einer Zeit, wo das Interesse für Mathematik fast verschwunden war, ein Mann wie Nicolaus von Cusa sich damit beschäftigt hat.

Es handelt sich um folgendes: in der griechischen Mathematik hatte man gewisse Strecken mit Hilfe des Zirkels und des Lineals genau herstellen können, z. B. die Seite eines Quadrats von doppeltem Flächeninhalt eines gegebenen oder die Seite eines in einem Kreise eingeschriebenen regulären Pentagons. Bei der Verdoppelung des Volumens eines Würfels, bei der Dreiteilung des Winkels, bei der Bestimmung der Seite des regulären Siebenecks und endlich auch bei der Quadratur des Kreises war das aber nicht gelungen; die antiken Geometer hatten vielmehr alle diese Probleme mit Hilfe von mechanischen Kurven behandelt, welche sie zu diesem Zweck erfunden hatten.

So entstand die Frage, die Probleme, welche man mit Zirkel und Lineal lösen kann, genau zu charakterisieren. Aber erst in modernen Zeiten wurden die Mittel erfunden, mit deren Hülfe man diese Frage systematisch untersuchen kann. Es zeigte sich nämlich, daß die Längen sämtlicher Strecken, welche man, von einer Einheitsstrecke ausgehend, mit Hilfe von Zirkel und Lineal erhalten kann, eine Klasse von Zahlen bilden, die eng umgrenzt ist. Es handelt sich um eine sehr spezielle Art von algebraischen Zahlen, d. h. von Zahlen, die man als Wurzeln einer gewöhnlichen algebraischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten darstellen kann.

Während aber die Unmöglichkeit der Konstruktion mit Lineal und Zirkel bei allen übrigen der genannten Probleme (Dreiteilung des Winkels, Verdoppelung des Würfels usf.) darauf beruht, daß die dabei auftretenden Zahlen zwar algebraische Zahlen sind, aber nicht von der eben erwähnten speziellen Art, liegt der innere Grund für die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises darin, daß die hier maßgebliche Zahl π überhaupt nicht zu den algebraischen Zahlen gehört.

Die Erkenntnis, daß es nicht-algebraische Zahlen, die sogenannten „transzendenten" Zahlen gibt, ist eine Errungenschaft des 19. Jahrhunderts. Der Mathematiker LIOUVILLE konnte gewisse Zahlen angeben, von denen er bewies, daß sie nicht algebraisch sind. Viel schwieriger ist selbstverständlich das umgekehrte Problem, von einer bekannten Zahl zu ermitteln, ob sie algebraisch ist oder nicht. Für die Basis e der natürlichen Logarithmen konnte CH. HERMITE im Jahre 1873 diesen Nachweis mit Hilfe eines wunderbaren Kunstgriffes nachweisen, welche den Ausgangspunkt der epochemachenden Untersuchungen LINDEMANNS bildete (1883).

LINDEMANN fand, daß, abgesehen von ganz trivialen Fällen, jeder Ausdruck von der Form $C_1 e^{c_1} + C_2 e^{c_2} + \ldots + C_n e^{c_n}$, in welchem die Zahlen C_k, c_k algebraisch sind, immer von Null verschieden sein muß. Dieser Satz von LINDEMANN enthält aber als unmittelbares Korollar den Nachweis der Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises: in der Tat ist die imaginäre Einheit i als Wurzel der Gleichung $x^2 + 1 = 0$ algebraisch, dagegen ist πi nicht algebraisch, da der Ausdruck $e^{\pi i} + e^0 = 0$ ist. Folglich kann auch π nicht algebraisch sein. Diese Feststellung aber schließt die Unmöglichkeit der Kreisquadratur in sich.

Man muß nicht nur die außerordentlich geistreiche Schlußweise bewundern, mit welcher LINDEMANN dem Jahrtausende alten Problem eine neue, der modernen Analysis zugängliche Wendung gegeben hat, sondern vor allem die Zähigkeit, mit welcher es ihm gelungen ist, die Hermitesche Methode auf komplexe Integrationswege auszudehnen.

Diese eine Leistung Lindemanns, die einen Glanzpunkt in den mathematischen Erfolgen der Neuzeit darstellt, überstrahlt alle früheren und späteren Werke unseres verblichenen Kollegen.

Lediglich soll noch erwähnt werden, daß die Clebschschen Vorlesungen über Geometrie, welche Lindemann herausgegeben hat, in weiteren Kreisen besonders bekannt geworden sind.